УДК 697.317
doi: 10.21685/2587-7704-2024-9-1-12

Open Access RESEARCH ARTICLE

Моделирование нелинейных систем с помощью интегральных частотных характеристик

Михаил Александрович Щербаков
Пензенский государственный университет, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40
mashcherbakov@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача моделирования нелинейных систем в частотной области. Для представления нелинейной системы используется спектральное разложение Вольтерра, определяемое через многомерные преобразования Фурье ядер системы. С целью уменьшения размерности частотного представления нелинейной системы вводится понятие интегральной частотной характеристики, что дает возможность обобщить описание ранее известных классов нелинейных систем. Предлагается подход к синтезу нелинейных систем с заданными требованиями на основе предварительного моделирования спектрального состава выходного сигнала нелинейной системы.

Ключевые слова: моделирование нелинейных систем, ряды Вольтерра, многомерные спектральные преобразования

Для цитирования: Щербаков М. А. Моделирование нелинейных систем с помощью интегральных частотных характеристик // Инжиниринг и технологии. 2024. Т. 9 (1). С. 1–6. doi: 10.21685/2587-7704-2024-9-1-12

Modeling of nonlinear systems using integrated frequency characteristics

Mikhail A. Shcherbakov
Penza State University, 40 Krasnaya Street, Penza, Russia
mashcherbakov@yandex.ru

Abstract. The problem of modeling nonlinear systems in the frequency domain is considered. To represent a nonlinear system, the Volterra spectral decomposition is used, determined through multidimensional Fourier transforms of the system kernels. In order to reduce the dimension of the frequency representation of a nonlinear system, the concept of an integral frequency response is introduced, which makes it possible to generalize the description of previously known classes of nonlinear systems. An approach to the synthesis of nonlinear systems with specified requirements is proposed based on preliminary modeling of the spectral composition of the output signal of the nonlinear system.

Keywords: modeling of nonlinear systems, Volterra series, multi-dimensional spectral transformations

For citation: Shcherbakov M.A. Modeling of nonlinear systems using integrated frequency characteristics. *Inzhiniring i tekhnologii = Engineering and Technology*. 2024;9(1):1–6. (In Russ.). doi: 10.21685/2587-7704-2024-9-1-12

В отличие от линейных систем, поведение которых полностью определяется их амплитудно-частотными характеристиками, описание нелинейных систем не допускает такой простой и наглядной интерпретации. Преобразование спектра входного процесса в нелинейном случае является гораздо более сложным процессом, приводящим к расширению входного спектра, возникновению многочисленных комбинационных гармоник и другим нелинейным эффектам. В то же время использование этих более сложных и богатых по своей природе нелинейных явлений как раз и позволяет решать задачи, перед которыми линейные методы оказываются бессильными.

Для описания нелинейных систем воспользуемся подходом, базирующимся на использовании функциональных рядов Вольтерра [1]. На основе использования аппарата многомерного преобразования

© Щербаков М. А., 2024. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Фурье можно показать [2], что нелинейная система M-го порядка в частотной области характеризуется набором из M частотных характеристик (ядер в частотной области) $H_1(\omega)$, $H_2(\omega_1, \omega_2)$, ..., $H_M(\omega_1, ..., \omega_M)$, позволяющих рассчитать частотный отклик $Y(\omega)$ системы на любое воздействие $X(\omega)$ по формуле

$$Y(\omega) = \sum_{m=1}^{M} Y_m(\omega) = H_1(\omega) X(\omega) +$$

$$+ \sum_{m=2}^{M} \frac{1}{(2\pi)^{(m-1)}} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} H_m(\omega_1, ..., \omega_m) \delta\left(\omega - \sum_{i=1}^{m} \omega_i\right) \prod_{i=1}^{m} X(\omega_i) d\omega_i, \quad (1)$$

где $X(\omega)$ – преобразование Фурье входного сигнала $x(n)$. Первый член $Y_1(\omega)$ в выражении (1) специально выделен и характеризует линейную составляющую систему, а остальные $(M - 1)$ – представляют собой нелинейные составляющие $Y_m(\omega)$, $m = 2, ..., M$ различного порядка. Несмотря на свой исчерпывающий характер, представление (1) неудобно для практического синтеза систем, так как нелинейные члены определяются через многомерные интегралы.

Для упрощения частотного анализа нелинейных систем для заданного класса воздействий и его приближения к хорошо разработанным линейным методам можно воспользоваться так называемыми описывающими функциями [3]. Если входной спектр имеет вид $X(\omega) = KU(\omega)$, где K – некоторый масштабирующий коэффициент, то реакция $Y(\omega)$, согласно (1), определяется суммой

$$Y(\omega, K) = \sum_{m=1}^{M} K^m Y_m(\omega). \quad (2)$$

По аналогии с частотной характеристикой линейной системы описывающая функция представляет собой функцию $W(\omega, K, U)$, связывающую компоненты входа и выхода на одной и той же частоте, и вводится следующим образом:

$$W(\omega, K, U) = \frac{Y(\omega, K)}{X(\omega)} = \frac{Y(\omega, K)}{KU(\omega)}.$$

С учетом выражений (1) и (2) функцию $W(\omega, K, U)$ можно записать в развернутом виде

$$W(\omega, K, U) = H_1(\omega) + \frac{1}{U(\omega)} \sum_{m=2}^{M} K^{m-1} Y_m(\omega).$$

Если система линейна, то функция $W(\omega, K, U)$ совпадает с его частотной характеристикой $H_1(\omega)$ и зависит только от частоты ω. Для нелинейной системы описывающая функция зависит также от коэффициента K и входного спектра $U(\omega)$. При этом учитываются спектральные составляющие на частоте ω, обусловленные как отдельными спектральными ядрами $H_m(\omega_1, ..., \omega_m)$ (внутриядерное взаимодействие), так и взаимным влиянием спектральных компонент $Y_m(\omega)$ от нелинейностей различного порядка (межъядерное взаимодействие).

В то же время описывающая функция не позволяет учесть такие типичные нелинейные явления, как расширение спектра за пределы частотного диапазона входного сигнала, сопровождающееся возникновением спектральных составляющих на частотах, отличных от частот входного воздействия. Если, например, входной сигнал нелинейной системы второго порядка представляет собой сумму постоянной составляющей и двух некратных гармоник на частотах ω_1 и ω_2, то описывающая функция будет не в состоянии учесть возникновение комбинационных гармоник на частотах $\omega_1 \pm \omega_2$, $2\omega_1$, $2\omega_2$, что существенно ограничивает область ее применения.

Для преодоления указанного недостатка рассмотрим спектр m-й степени входного сигнала $x(n)$, определяемый оператором $S_m[X(\omega)]$ вида

$$X_m(\omega) = S_m\left[X(\omega)\right] = \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_1 - ... - \omega_m) \prod_{i=1}^{m} X_i(\omega_i) d\omega_i, \quad (3)$$

в частотном диапазоне которого представлены все спектральные составляющие, обусловленные нелинейностью m-го порядка. Назовем для краткости $X_m(\omega)$ нелинейным входным спектром, а составляющую $Y_m(\omega)$ – нелинейным выходным спектром порядка m. Для описания зависимости, связывающей компоненты данных спектров на частоте ω, определим функцию

$$G_m(\omega, X(\omega)) = \frac{Y_m(\omega)}{X_m(\omega)} \tag{4}$$

для $X_m(\omega) \neq 0$. Данная функция при $m = 1$ совпадает с частотной характеристикой $H_1(\omega)$ линейной части и зависит только от ω. Для $m \geq 2$ она зависит также от $X(\omega)$ и дает квазилинейное описание нелинейности m-го порядка.

Из выражений (1), (3) и (4) видно, что функция $G_m(\omega, X(\omega))$ определяет линейную взаимосвязь частотных компонент спектров $X_m(\omega)$ и $Y_m(\omega)$, полученных интегрированием вдоль плоскостей $\omega_1 +...+ \omega_m = \omega$. Поэтому в отличие от ядер $H_m(\omega_1, ..., \omega_m)$, определяющих частотные свойства системы в отдельных точках частотной области, функцию $G_m(\omega, X(\omega))$ можно рассматривать как *интегральную частотную характеристику m-го порядка*.

На основании определения (4) выходной спектр (1) нелинейной системы M-го порядка можно представить в виде

$$Y(\omega) = G_1(\omega)X(\omega) + \sum_{m=2}^{M} G_m(\omega, X(\omega))X_m(\omega). \tag{5}$$

Данный ряд дает эквивалентное представление нелинейной системы в виде структуры, аналогичной модели Гаммерштейна и представленной на рис. 1,*а*. Отличие состоит в том, что здесь функции $G_m(\omega, X(\omega))$, представляющие собой передаточные функции линейных звеньев, зависят от входного спектра $X(\omega)$.

Нелинейные системы частного вида, показанные на рис. 1,*б*,*в*, могут быть преобразованы к виду (5) и представлены в виде эквивалентной структуры (см. рис. 1,*а*). Интегральные частотные характеристики для наиболее распространенных нелинейных моделей частного вида определяются следующим образом:

1) модель Гаммерштейна

$$G_m(\omega, X(\omega)) = G_m(\omega);$$

2) модель Винера

$$G_m(\omega, X(\omega)) = \frac{Z_m(\omega)}{X_m(\omega)} = \frac{S_m\left[H_m(\omega)X(\omega)\right]}{X_m(\omega)};$$

3) смешанная модель Винера – Гаммерштейна

$$G_m(\omega, X(\omega)) = \frac{Z_m(\omega)}{X_m(\omega)}G_m(\omega) = \frac{S_m\left[H_m(\omega)X(\omega)\right]}{X_m(\omega)}G_m(\omega).$$

Заметим, что для модели Гаммерштейна интегральная частотная характеристика, как и следовало ожидать, не зависит от входного спектра, что существенно упрощает ее анализ. Для смешанной модели интегральная характеристика представляет собой произведение соответствующих характеристик моделей Винера и Гаммерштейна.

В отличие от линейных при синтезе нелинейных систем с заданными частотными свойствами необходимо заранее определить класс входных сигналов. Использование синусоидальных воздействий при проектировании нелинейных систем так же, как и в линейном случае, позволяет существенно упростить анализ и синтез в частотной области и получить не только качественную картину происходящих процессов, но и дать практические рекомендации по выбору параметров нелинейных систем в зависимости от специфики решаемой задачи.

Ограничимся для наглядности исследованием нелинейной системы третьего порядка ($M = 3$), представляющего практический интерес, для класса синусоидальных воздействий вида

$$x(n) = A_0 + A_1 \cos^T n. \tag{6}$$

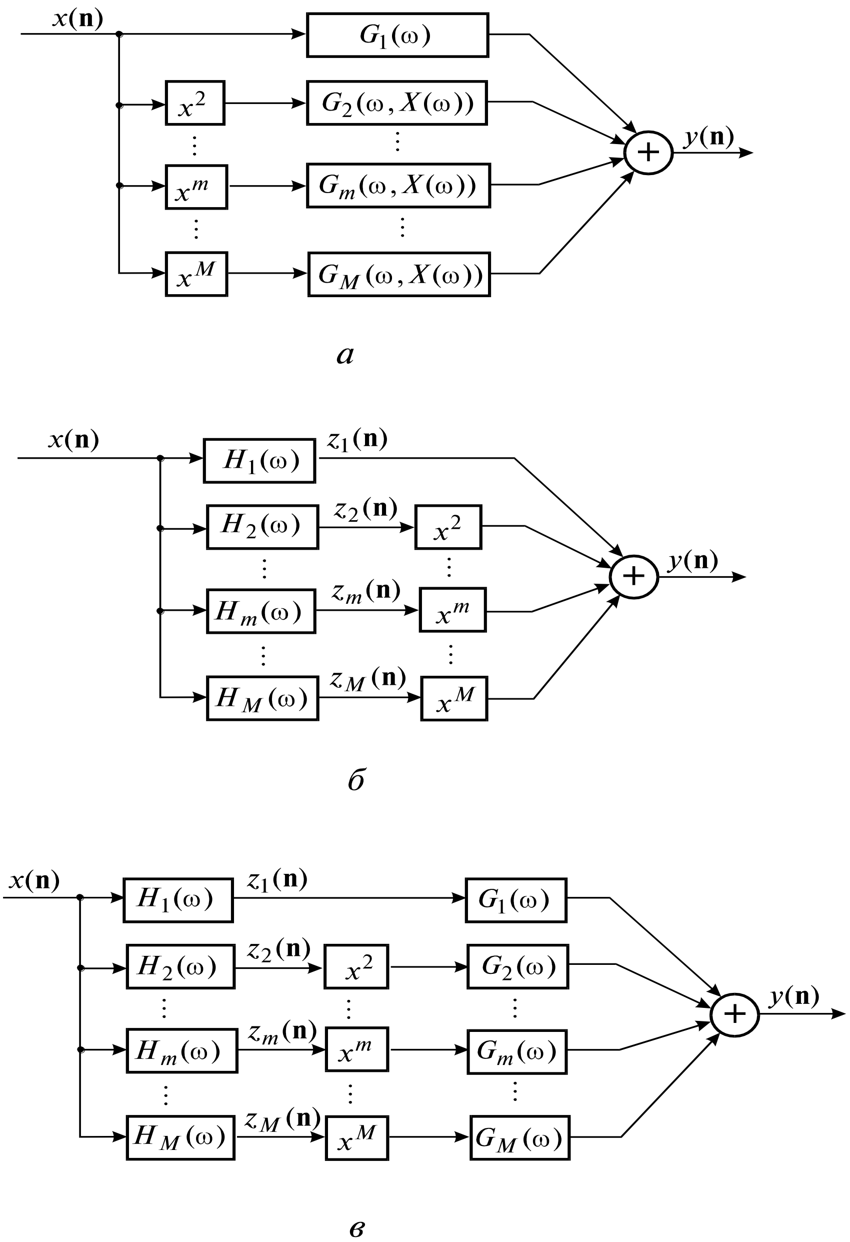

Рис. 1. Структуры нелинейных систем: *а* – эквивалентное представление и модель Гаммерштейна при $G_m(\omega, X(\omega)) = G_m(\omega)$; *б* – модель Винера; *в* – смешанная модель

Для данного класса воздействий нелинейные входные спектры различных порядков определяются следующим образом:

$$X_1(\omega) = X(\omega) = 2\pi\left[A_0\delta(\omega) + A_1\delta(\omega-\lambda)\right],$$

$$X_2(\omega) = 2\pi\left[(A_0^2 + 2A_1^2)\delta(\omega) + 2A_0A_1\delta(\omega-\lambda) + A_1^2\delta(\omega-\mathbf{2}\lambda)\right],$$

$$X_3(\omega) = 2\pi\Big[(A_0^3 + 6A_0A_1^2)\delta(\omega) + 3(A_1^3 + A_0^2A_1)\delta(\omega-\lambda) +$$

$$+3A_0A_1^2\delta(\omega-2\lambda) + A_1^3\delta(\omega-3\lambda)\Big]. \qquad (7)$$

С целью сокращения записи в данные выражения включены лишь члены, соответствующие положительным частотам. При этом подразумевается, что в силу симметрии спектров для каждой составляющей на частоте $k\lambda$, $k > 1$ существует ей подобная на частоте $-k\lambda$ с той же амплитудой.

В состав нелинейных спектров (7) входят все возможные компоненты, обусловленные нелинейностями до третьего порядка. По выражениям (7) можно проследить механизм зарождения различных комбинационных гармоник и зависимость их величины от амплитуд входных гармоник. Так, например, амплитуда A_λ составляющей спектра выходного сигнала на частоте λ определяется зависимостью

$$A_\lambda = A_1 + 2A_0A_1 + 3(A_1^3 + A_0^2A_1).$$

Таким образом, оказывается возможным, путем анализа входных нелинейных спектров для заданного класса воздействий предварительно оценить спектральный состав выходного сигнала нелинейной системы и качественно описать причинно-следственные спектральные зависимости. По результатам такого анализа можно определить степень нелинейности моделируемой системы, достаточную для решения поставленной задачи. На следующем этапе синтеза формулируются требования к интегральным частотным характеристикам, обеспечивающим усиление либо подавление отдельных составляющих выходного спектра, и выбирается структура системы, подходящая для реализации заданных частотных свойств.

Интегральные частотные характеристики системы второго порядка при синусоидальных воздействиях будут иметь вид

$$G_1(\omega) = H_1(\omega), \quad \omega = 0, \omega = \lambda;$$

$$G_2(\omega, A_0, A_1) = \begin{cases} \dfrac{A_0^2H_2(0,0) + 2A_1^2H_2(-\lambda,\lambda)}{A_0^2 + 2A_1^2}, & \omega = 0; \\ H_2(0,), & \omega = \lambda; \\ H_2(\lambda,\lambda), & \omega = 2\lambda; \end{cases} \tag{8}$$

$$G_3(\omega, A_0, A_1) = \begin{cases} \dfrac{A_0^3H_3(0,0,0) + 6A_0A_1^2H_3(-\lambda,0,\lambda)}{A_0^3 + 6A_0A_1^2}, & \omega = 0; \\ \dfrac{A_1^3H_3(-\lambda,\lambda,\lambda) + A_0^2A_1H_3(0,0,\lambda)}{A_1^3 + A_0^2A_1}, & \omega = \lambda; \\ H_3(0,\lambda,\lambda), & \omega = 2\lambda; \\ H_3(\lambda,\lambda,\lambda), & \omega = 3\lambda. \end{cases}$$

Следует еще раз подчеркнуть, что интегральные частотные характеристики $G_m(\omega)$ определены на частотах, для которых соответствующие нелинейные входные спектры $X_m(\omega) \neq 0$. Например, для синусоидального воздействия вида (6) с частотой λ в соответствии с (8) интегральная частотная характеристика $G_2(\omega)$ второго порядка определена на частотах $\omega = 0$, $\omega = \lambda$ и $\omega = 2\lambda$. Это позволяет представить $G_2(\omega)$ в виде совокупности трех компонент $\left\{G_{2,0}(\lambda)\delta(\omega), G_{2,1}(\lambda)\delta(\omega-\lambda), G_{2,2}(\lambda)\delta(\omega-2\lambda)\right\}$, получаемых изменением λ в исследуемом диапазоне частот. Как видно из (8), данные зависимости выражаются через срезы ядер второго порядка при определенных наборах аргументов. В общем случае нелинейной системы m-го порядка интегральная частотная характеристика $G_m(\omega)$ при синусоидальном воздействии вида (6) может быть представлена набором зависимостей

$$\left\{G_{m,0}(\lambda)\delta(\omega), G_{m,1}(\lambda)\delta(\omega-\lambda), \ldots,\ G_{m,m}(\lambda)\delta(\omega-m\lambda)\right\},$$

определяемых сечениями ядер $H_m(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ m-го порядка в частотной области.

Таким образом, частотные свойства синтезируемой системы могут формироваться путем задания значений ядер в частотной области вдоль плоскостей, характеризующих вклад различных комбинационных гармоник в суммарную реакцию системы. Например, для подавления постоянной составляющей и второй гармоники выходного сигнала для системы второго порядка согласно (8) необходимо, чтобы $H_2(0, 0) = H_2(-\lambda, \lambda) = H_2(\lambda, \lambda) = 0$.

Требования, предъявляемые к сечениям ядер в частотной области, могут быть преобразованы в эквивалентные условия относительно нелинейных импульсных характеристик системы во временной области, необходимых для ее практической реализации.

Список литературы

1. Пупков К. А., Капалин В. И., Ющенко А. С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М. : Наука, 1976. 448 с.
2. Щербаков М. А. Моделирование нелинейных систем с использованием ортогональных функциональных полиномов. Проблемы автоматизации и управления в технических системах : сб. ст. Междунар. науч.-техн. конф., посвящ. 55-летию образования кафедры АиТ. Пенза, 2019. Т. I. С. 277–282.
3. Peyton-Jones J. C., Billings S. A. Describing functions, Volterra series, and the analysis of non-linear systems in the frequency domain // Int. Journal of Control. 1991. Vol. 53, № 4. P. 871–887.

References

1. Pupkov K.A., Kapalin V.I., Jushhenko A.S. *Funkcional'nye rjady v teorii nelinejnyh system = Functional series in the theory of nonlinear systems*. Moscow: Nauka, 1976:448. (In Russ.)
2. Shherbakov M.A. *Modelirovanie nelinejnyh sistem s ispol'zovaniem ortogonal'nyh funkcional'nyh polinomov. Problemy avtomatizacii i upravlenija v tehnicheskih sistemah: sb. st. Mezhdunar. nauch.-tehn. konf., posvjashh. 55-letiju obrazovanija kafedry AiT = Modeling of nonlinear systems using orthogonal functional polynomials. Problems of automation and control in technical systems : collection of articles of International Scientific and Technical conf., dedicated. 55th anniversary of the formation of the AIT Department*. Penza, 2019;I:277–282. (In Russ.)
3. Peyton-Jones J.C., Billings S.A. Describing functions, Volterra series, and the analysis of non-linear systems in the frequency domain. *Int. Journal of Control*. 1991;53(4):871–887.

Поступила в редакцию / Received 11.03.2024

Принята к публикации / Accepted 11.04.2024