



УДК 533.2, 51-72  
doi:10.21685/2587-7704-2021-6-1-10



Open  
Access

RESEARCH  
ARTICLE

## Нульмерная математическая модель теплообмена в порошковой среде

**Дмитрий Алексеевич Тукмаков**

Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук»,  
Россия, г. Казань ул. Лобачевского, 2/31  
tukmakovda@imm.knc.ru

**Аннотация.** Представлена математическая модель теплообменных процессов в порошковой среде. Математическая модель, в которой функции, описывающие температуры компонент смеси, зависят лишь от временных переменных, выведена из более общей математической модели, известной из литературы и допускающей только численное интегрирование. В результате расчетов было определено, каким образом диаметр частиц, из которых состоит дисперсная компонента порошковой среды, влияет на процесс перехода к равновесной температуре в двухкомпонентной смеси.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, обыкновенные дифференциальные уравнения, насыпная плотность, многофазные среды

**Финансирование:** работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00442 «Особенности и эффекты волновой динамики многофазных сред», а также гранта президента РФ № МК-297.2020.1.

**Для цитирования:** Тукмаков Д. А. Нульмерная математическая модель теплообмена в порошковой среде // Инжиниринг и технологии. 2021. Т. 6(1). С. 1–7. doi:10.21685/2587-7704-2021-6-1-10

## Zero-dimensional mathematical model of heat transfer in a powder medium

**Dmitriy A. Tukmakov**

Federal Research Center "Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences",  
2/31 Lobachevsky Street, Kazan, Russia  
tukmakovda@imm.knc.ru

**Abstract.** The paper presents a mathematical model of heat exchange processes in a powder medium. The mathematical model, in which the functions describing the temperatures of the mixture components depend only on temporal variables, is derived from a more general mathematical model known from the literature and allowing only numerical integration. As a result of calculations, it was determined how the diameter of the particles that make up the dispersed component of the powder medium affects the transition to the equilibrium temperature in the two-component mixture.

**Keywords:** mathematical modeling, ordinary differential equations, bulk density, multiphase media

**Acknowledgments:** the research was supported by the Grant from the Russian Foundation for Basic Research No. 19-01-00442 "Features and effects of wave dynamics of multiphase media", and by the Grant from the President of the Russian Federation No. MK-297.2020.1.

**For citation:** Tukmakov D.A. Zero-dimensional mathematical model of heat transfer in a powder medium. *Inzhiniring i tekhnologii = Engineering and Technology*. 2021;6(1):1–7. (In Russ.). doi:10.21685/2587-7704-2021-6-1-10

### Введение

В естественной природе и технических приложениях встречаются течения сред, являющихся неоднородными по своему физико-химическому составу [1–12]. В связи со сложностью проведения



физических экспериментов существенное значение при изучении таких сред имеет математическое моделирование. Неоднородные среды могут быть гомогенными [1, 8], компоненты которых имеют одинаковое агрегатное состояние, или же гетерогенными, компоненты которых имеют различное агрегатное состояние. Одним из видов гетерогенных сред являются аэрозоли – газокапельные и запыленные среды [1, 2, 9–12]. В случае, когда масса дисперсной компоненты много больше массы газовой компоненты, такие смеси именуется порошковыми средами, средами насыпной плотности [1–7]. Динамика сред насыпной плотности имеет существенные отличия от динамики аэрозольных сред [1, 2]. В данной работе представлена математическая модель теплообмена в порошковой среде, в которой отсутствуют пространственные составляющие уравнений, моделирующих процесс переноса тепла между компонентами смеси.

Рассмотрим известную из монографии [2] математическую модель динамики двухкомпонентной смеси с насыпной плотностью. Для течения с одномерной геометрией потока система уравнений движения порошковой среды записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho_1 u_1^2}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x} = -\alpha_1 F_{12}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial x} + \frac{\partial \rho_2 u_2^2}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} = \alpha_1 F_{12}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_{2T}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_{2T} u_2}{\partial x} - \xi_{2T} \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = Q_{12}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_{2p}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_{2p} u_2}{\partial x} + (1 - \xi_{2T}) \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho_1 E_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 E_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 E_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_2 E_2 u_2)}{\partial x} + \frac{\partial p(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_2 u_2}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Здесь  $\alpha_1, \alpha_2$  – объемные содержания газовой и дисперсной компоненты,  $\rho_1$  – плотность газовой компоненты,  $\rho_2$  – средняя плотность дисперсной компоненты;  $u_1, u_2$  – скорости газовой и дисперсной компоненты порошковой среды,  $\sigma_2$  – тензор напряжений порошковой среды,  $\xi_{2T}$  – коэффициент перехода сдвиговых напряжений в тепловую энергию,  $e_i$  – внутренняя энергия  $i$ -й компоненты порошковой среды,  $F_{12}$  – функция межкомпонентного обмена импульсом,  $Q_{12}$  – функция межкомпонентного обмена теплом,  $E_1, E_2$  – полные энергии динамики каждой из компонент смеси.

Для уравнений применяются следующие замыкающие соотношения:

$$\rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \sum_i \alpha_i = 1, \quad e_2 = e_{2T} + e_{2p}, \quad E_i = e_i + 0,5 u_i^2, \quad (8)$$

$$e_1 = c_1 T_1, \quad e_{2T} = c_2 T_2, \quad Q_{12} = \frac{6 \alpha_2 Nu_{12} \lambda (T_1 - T_2)}{d^2}, \quad Nu_{12} = 2 \exp(-M_{12}) + 0,459 Re_{12} Pr^{0,33}. \quad (9)$$

Здесь  $c_1, c_2, \lambda$  – теплоемкости газовой и дисперсной компонент смеси, теплопроводность газа.  $M_{12}, Re_{12}, Pr, Nu_{12}$  – безразмерные параметры, характеризующие динамические процессы в двухкомпонентной среде и зависящие от скорости движения компонент смеси, при отсутствии скоростей, указанных выше, эти параметры равны нулю [2].

Система уравнений в частных производных (1)–(7) имеет нелинейный характер и может быть интегрирована исключительно численными методами, без возможности получить точное решение.

Если предположить, что все значения скорости приравниваются к нулю, то все динамические функции зависят только от временной переменной (система уравнений (1)–(8)):



$$\frac{d\rho_1}{dt} = 0, \quad (1^*)$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} = 0, \quad (2^*)$$

$$\frac{d\rho_2 e_{2T}}{dt} = Q_{12}, \quad (5^*)$$

$$\frac{d\rho_2 e_{2p}}{dt} = 0, \quad (6^*)$$

$$\frac{d(\rho_1 E_1)}{dt} + \frac{d(\rho_2 E_2)}{dt} = 0. \quad (7^*)$$

В предположении отсутствия скоростей относительно число Нуссельта,  $Nu_{12} = 2 \exp(0) = 2$ .

Из уравнений (1<sup>\*</sup>), (2<sup>\*</sup>) следует, что плотности компонент смеси являются постоянными величинами. Из уравнений (2<sup>\*</sup>) и (6<sup>\*</sup>) определяется, что  $e_{2p}$  является постоянной величиной. Из замыкающих соотношений (9) следует выражение

$$\rho_2 \frac{de_{2T}}{dt} + \rho_2 \frac{de_{2p}}{dt} + \rho_1 \frac{de_1}{dt} = 0. \quad (7^{**})$$

Из уравнения (9), (6<sup>\*</sup>), (8) следуют уравнения (10), (11)

$$\rho_2 c_2 \frac{dT_2}{dt} = \frac{6\alpha_2 Nu_{12} \lambda (T_1 - T_2)}{d^2}, \quad (10)$$

$$\rho_2 c_2 \frac{dT_2}{dt} + \rho_1 c_1 \frac{dT_1}{dt} = 0. \quad (11)$$

Из уравнения (10), (11) следуют соотношения

$$\frac{d^2 \rho_2 c_2}{6\alpha_2 Nu_{12} \lambda} \frac{dT_2}{dt} + T_2 = T_1, \quad (10^*)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = -\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \frac{dT_1}{dt}. \quad (11^*)$$

Введем следующие обозначения для упрощения уравнений (10<sup>\*</sup>) и (11<sup>\*</sup>):

$$Nu_{12} = 2, \quad \beta_1 = \frac{d^2 \rho_2 c_2}{6\alpha_2 Nu_{12} \lambda}, \quad \beta_2 = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2},$$

$$\beta_1 \frac{dT_2}{dt} + T_2 = T_1, \quad (12)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = -\beta_2 \left( \beta_1 \frac{d^2 T_2}{dt^2} + \frac{dT_2}{dt} \right), \quad (11^{**})$$

$$-\frac{1 + \beta_2}{\beta_1 \beta_2} \frac{dT_2}{dt} = \frac{d^2 T_2}{dt^2}, \quad (12^*)$$

$$\frac{1 + \beta_2}{\beta_1 \beta_2} = \beta,$$



$$\beta = \frac{12\alpha_2\lambda(\rho_2c_2 + \rho_1c_1)}{d^2\rho_2c_2\rho_1c_1},$$

$$\frac{d^2T_2}{dt^2} = -\beta\frac{dT_2}{dt}. \quad (13)$$

Делается следующая замена переменной  $f = \frac{dT_2}{dt}$  :

$$\frac{df}{dt} = -\beta f, \quad (13^*)$$

$$f = Ce^{-\beta t},$$

$$T_2 = -\frac{C}{\beta}e^{-\beta t} + C_1. \quad (14)$$

Из уравнения (12) следует выражение

$$T_1 = \beta_1Ce^{-\beta t} - \frac{C}{\beta}e^{-\beta t} + C_1, \quad (15)$$

$$T_1(t) = e^{-\beta t}C\frac{\beta_1\beta - 1}{\beta} + C_1. \quad (15^*)$$

Запишем для математической модели начальные условия:

$$T_1(0) = T_{10}, T_2(0) = T_{20}. \quad (16)$$

Из начальных условий (16) возможно определить неизвестные коэффициенты системы уравнений

$$\begin{cases} C\frac{\beta_1\beta - 1}{\beta} + C_1 = T_{10}, \\ -\frac{C}{\beta} + C_1 = T_{20}, \end{cases} \quad (16)$$

$$\beta_1C = T_{10} - T_{20}, \quad (17)$$

$$C = \frac{T_{10} - T_{20}}{\beta_1}, \quad (18)$$

$$C_1 = T_{20} + \frac{T_{10} - T_{20}}{\beta\beta_1}. \quad (19)$$

Рассмотрим результаты расчетов, полученных по формулам (14), (15).

В расчетах предполагались следующие свойства газовой и твердой компонент смеси:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$ ;  $c_1 = 1,007$  Дж/(кг·К),  $c_2 = 0,835$  Дж/(кг·К),  $\lambda = 0,0259$  Вт/(м·град),  $\rho_1^0 = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_2^0 = 2500$  кг/м<sup>3</sup>.

### Результаты расчетов

Решение реализовано в виде компьютерной программы, написанной на языке программирования Fortran 2003. В результате расчетов наблюдается постепенное выравнивание температуры компоненты смеси (рис. 1). Также наблюдается некоторое уменьшение температуры дисперсной компоненты до равновесного значения (рис. 2). При этом в связи с существенно большей массой дисперсной компоненты смеси более интенсивным процессом является нагревание газовой компоненты, а не остывание дисперсной составляющей смеси. Увеличение размера частиц приводит к увеличению времени разогрева газовой компоненты (рис. 3) и увеличению времени остывания дисперсной компоненты до равновесной температуры (рис. 4).

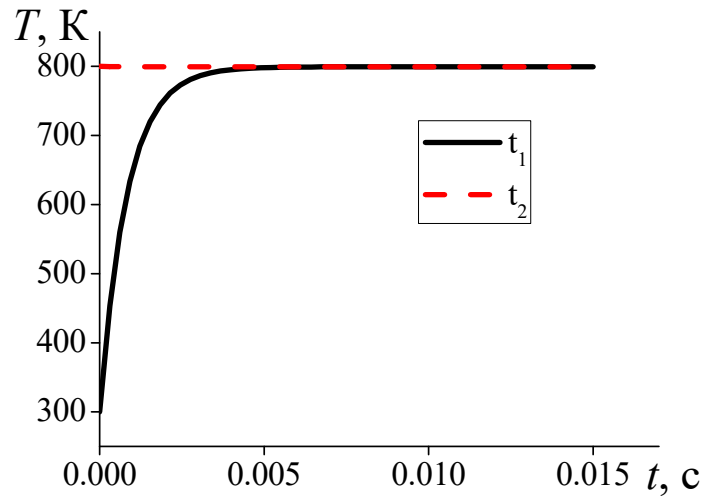


Рис. 1. Зависимость температур компонент смеси от времени

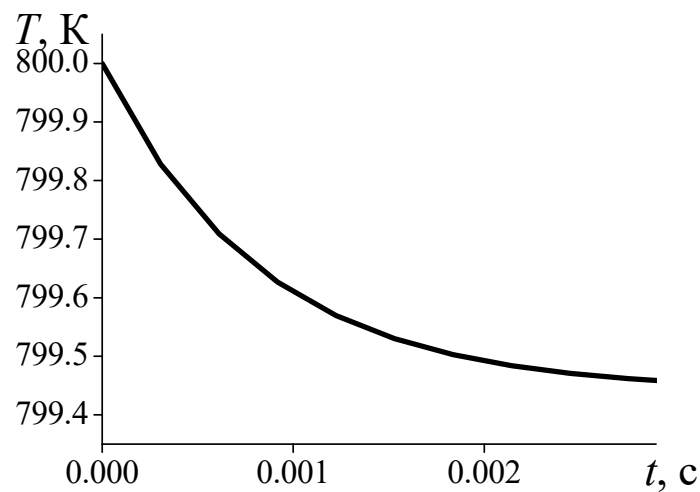


Рис. 2. Зависимость от времени температуры дисперсной компоненты

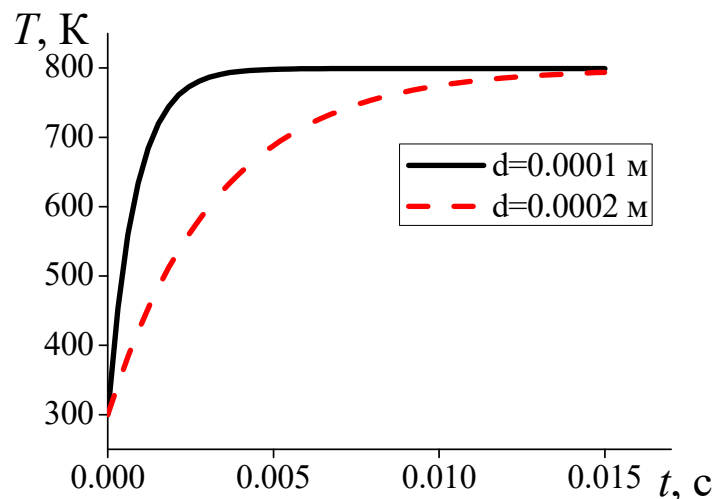


Рис. 3. Зависимость от времени температуры газовой компоненты смеси при различных диаметрах частиц

### Заключение

В данной работе нелинейная система уравнений в частных производных, описывающая динамику порошковой среды, интегрируемая только численно, при помощи упрощающих допущений сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих точное решение. В результате расчетов было определено, что двухкомпонентная среда за счет существенно большей массы



дисперсной компоненты имеет равновесную температуру, близкую к температуре дисперсной фазы. При этом время достижения компонентами порошковой среды равновесного значения температуры обратно пропорционально величине линейного размера частиц.

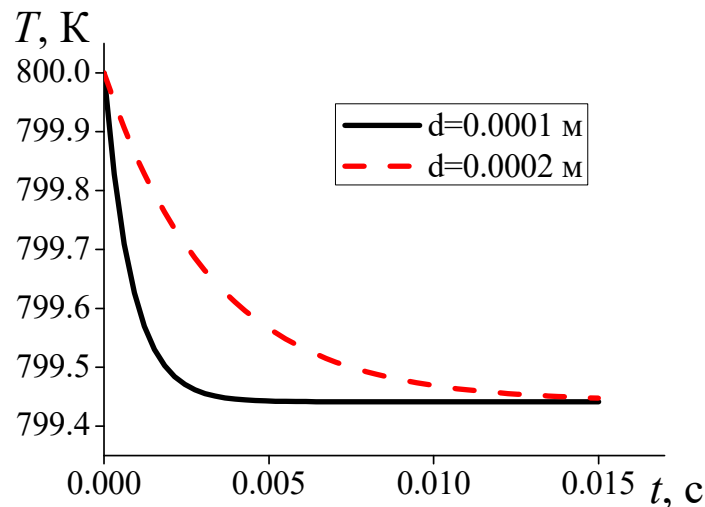


Рис. 4. Зависимость от времени температуры дисперсной компоненты при различных диаметрах частиц

### Список литературы

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М. : Наука, 1978. 336 с.
2. Кутушев А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб. : Недра, 2003. 284 с.
3. Кутушев А. Г., Родионов С. П. Взаимодействие слабых ударных волн со слоем порошкообразной среды // Физика горения и взрыва. 2000. № 3. С. 131–140.
4. Зверовщиков В. З., Воячек И. И., Зверовщиков А. Е., Понукалин А. В. Влияние насыпной плотности обрабатываемой среды на производительность объемной центробежно-планетарной обработки // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. 2013. № 12. С. 20–26.
5. Нижегородов А. И., Брянских Т. Б. Барабанный дозатор с делителем потоков для электрических печей с подвижной подовой платформой // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2016. № 6. С. 58–63.
6. Брагов А. М., Константинов А. Ю., Кочетков А. В., Модин И. А., Савихин А. О. Экспериментальное исследование деформационных свойств насыпного слоя из свинцовых шариков при динамическом и квазистатическом нагружении // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 4. С. 16–27.
7. Михайленко К. И., Кулешов В. С. Математическое моделирование скоростной неравномерности потока газа за пористой преградой // Вычислительные технологии. 2015. № 6. С. 46–58.
8. Тукмаков Д. А. Конечно-разностная модель динамики гомогенной смеси в применении к исследованию распространения и отражения ударной волны большой интенсивности в водородно-воздушной среде // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2020. № 1. С. 86–97.
9. Гаврилова В. А., Кашапов Н. Ф., Тукмаков А. Л., Тукмаков Д. А. Численное моделирование процесса напыления заряженного аэрозоля на поверхность в электростатическом поле // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. 2012. № 2. С. 177–182.
10. Тукмаков Д. А. Численное моделирование движения и отражения ударных волн высокой интенсивности в неоднородной среде // Физика и техника высоких давлений. 2019. № 4. С. 18–26.
11. Тукмаков Д. А. Численное моделирование распространения ударной волны из газа в электрически заряженную и нейтральную газовзвеси в плоском канале // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2020. № 2. С. 9–18.
12. Тукмаков Д. А. Численное исследование влияния объемного содержания дисперсной компоненты газовзвеси на интенсивность межфазного скоростного скольжения при разлете газовзвеси в вакуум // Прикладная математика & Физика. 2020. № 1. С. 41–50.

### References

1. Nigmatulin R.I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred = Fundamentals of the mechanics of heterogeneous media*. Moscow: Nauka, 1978:336. (In Russ.)
2. Kutushev A.G. *Matematicheskoe modelirovanie volnovykh protsessov v aerodispersnykh i poroshkoobraznykh sredakh = Mathematical modeling of wave processes in aerodispersed and powdery media*. Saint-Petersburg: Nedra, 2003:284. (In Russ.)



3. Kutushev A.G., Rodionov S.P. Interaction of weak shock waves with a layer of a powdered medium. *Fizika goreniya i vzryva = Combustion and Explosion Physics*. 2000;3:131–140. (In Russ.)
4. Zverovshchikov V.Z., Voyachek I.I., Zverovshchikov A.E., Ponukalin A.V. The effect of bulk density manufacturing environment on the performance of volumetric centrifugal planetary processing. *XXI vek: itogi proshlogo i problemy nastoyashchego plyus = XXI Century: Resumes of the Past and Challenges of the Present plus*. 2013;12:20–26. (In Russ.)
5. Nizhegorodov A.I., Bryanskikh T.B. A drum-type batcher with a flow separator for rotary hearth furnaces. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Proceedings of Irkutsk State Technical University*. 2016;6:58–63. (In Russ.)
6. Bragov A.M., Konstantinov A.Yu., Kochetkov A.V., Modin I.A., Savikhin A.O. Experimental study of deformation properties of a bulk layer from plumbum balls under dynamic and quasistatic loading. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika = PNRPU Mechanics Bulletin*. 2017;4:16–27. (In Russ.)
7. Mikhaylenko K.I., Kuleshov V.S. Numerical modelling of inhomogeneity scale of a flow rate behind the porous barrier. *Vychislitel'nye tekhnologii = Computational Technologies*. 2015;6:46–58. (In Russ.)
8. Tukmakov D.A. Finite difference dynamics model of a homogeneous mixture in application to the study of the large intensity of the shock wave in a hydrogen-air environment. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve = Models, Systems, Networks in Economics, Technology, Nature and Society*. 2020;1:86–97. (In Russ.)
9. Gavrilova V.A., Kashapov N.F., Tukmakov A.L., Tukmakov D.A. Numerical simulation of the charged aerosol spraying process on the surface in the electrostatic field. *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. A. N. Tupoleva = Vestnik KGTU im. A.N. Tupoleva*. 2012;2:177–182. (In Russ.)
10. Tukmakov D.A. Numerical modeling of the motion and reflection of high-intensity shock waves in a heterogeneous medium. *Fizika i tekhnika vysokikh davleniy = Physics and High Pressure Technology*. 2019;4:18–26. (In Russ.)
11. Tukmakov D.A. Numerical simulation of the propagation of a gas shock wave in electrically charged and neutral gas suspension in a flat channel. *Fundamental'nye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologii = Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology*. 2020;2:9–18. (In Russ.)
12. Tukmakov D.A. Numerical study of the influence of volume content of a dispersed gas-suspension component on the intensity of an interphasic speed sliding during gas-suspension split in vacuum. *Prikladnaya matematika & Fizika = Applied Mathematics & Physics*. 2020;1:41–50. (In Russ.)

Поступила в редакцию / Received 15.01.2021

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 17.02.2021

Принята к публикации / Accepted 01.03.2021